

Temelj matematičke teorije: pojmovi i tvdrnje

Izgradnja matematičke teorije

pojmovi

... definicije

Kako definirati...

paralelogram

skup racionalnih brojeva

?

Ne možemo sve pojmove definirati!

tvrdnje

... dokazi

Kako dokazati

dijagonale paralelograma se raspolavljaju

rezultat množenja realnog broja nulom je nula
 $(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$

?

Ne možemo sve tvrdnje dokazati!

Pojmovi

osnovni (nedefinirani) pojmovi

- točka, pravac, biti između
- 1, sljedbenik, skup

ostali pojmovi se **definiraju**
pomoću osnovnih i već definiranih
pojmovi

- dužina
- prirodan broj

Definicije

= tvrdnja koja jednoznačno opisuje neki matematički pojam pomoću osnovnih pojmova i/ili drugih ranije definiranih pojmova

- $2 = 1 + 1$
- Pravac koji prolazi polovištem dužine i okomit je na nju zovemo simetralom te dužine.
- Skup bez ijednog elementa naziva se prazan skup.
- Kažemo da je prirodni broj prost ako ima točno dva djelitelja.

Uočite riječi *zovemo*, *naziva se*, *kažemo da je*...

Definicije

- navode se nužna i dovoljna obilježja pojma
- ne smije biti preuska niti preširoka
- navodimo minimalan broj svojstava
- ne smije biti cirkularna
- ne smije opisivati prazan skup

(loši) primjeri

- Paralelni pravci su pravci koji se ne sijeku.
- Jednakokračan trapez je trapez čiji su kraci sukladni.
- Romb je paralelogram čije su dijagonale okomite, a stranice sukladne.
- Trapez je četverokut čije su osnovice paralelne.
- Pravi kut je kut čiji su kraci okomiti. Pravci su okomiti ako zatvaraju pravi kut.
- Trokut koji ima dva prava kuta zove se dvopravokutni trokut.
- Hipotenuzom trokuta zovemo najdulju stranicu trokuta.
- Kružnica je skup svih točaka jednako udaljenih od njenog središta.

Karakterizacije

- Četverokut čije su dijagonale sukladne, okomite i raspolavljaju se.
- Romb koji ima barem jedan pravi kut.
- Pravokutnik koji ima dvije susjedne sukladne stranice.
- Pravokutnik čije su dijagonale okomite.

Isti pojam može se definirati na različite (ekvivalentne) načine.

Odabiremo jednu definiciju, ostalo su tvrdnje koje dokazujemo i zovemo ih karakterizacijama pojma.

Tvrdnje (sudovi)

- **aksiomi** – tvrdnje koje smatramo istinitima
- **teoremi** – istinite tvrdnje koje se dokazuju pomoću aksioma i već dokazanih teorema
- **hipoteze**

Aksiomi

= tvrdnja koja se smatra istinitom i ne dokazuje se

- 1 je prirodni broj.
 - Kroz dvije različite točke prolazi točno jedan pravac.
 - Za svaka dva pozitivna realna broja a i b postoji prirodan broj n takav da je $na > b$.
 - Točkom izvan danog pravca prolazi točno jedan pravac paralelan tom pravcu.
- pokušaji dokazivanja ove tvrdnje doveli su do otkrića neeuklidskih geometrija

Je li neka tvrdnja aksiom (ili teorem ili nešto treće)
ovisi o odabiru skupa aksioma!

Aksiomi

Skup aksioma trebao bi biti

- konzistentan
 - nije moguće dokazati tvrdnje A i $\neg A$
 - potpun
 - za svaku tvrdnju (te teorije) može se dokazati da je istinita ili da nije istinita
 - nezavisan
 - nijedan aksiom ne može se dokazati pomoću ostalih
-
- Svaki konzistentan skup aksioma u kojem se mogu provesti elementarne aritmetičke operacije je nepotpun. (Kurt Gödel, 1931.)

Teoremi

= matematička tvrdnja čija je istinitost potvrđena dokazom, logičkim zaključivanjem iz aksioma i ranije dokazanih tvrdnji

- teorem
- propozicija
- lema
- korolar

Tvrdnja teorema je obično implikacija

- pretpostavka
- tvrdnja

Što je pretpostavka, a što tvrdnja ovih teorema? Iskažite ih u "ako... onda..." formi.

- Dijagonale kvadrata su sukladne.
- Kvadrat parnog broja je paran broj.
- Za $x, y \in \mathbb{Q}$ vrijedi $x + y = y + x$.
- Zbroj površina kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta jednak je površini kvadrata nad hipotenuzom tog trokuta.

Što je obrat svakog od tih teorema? Jesu li obrati istiniti?

Obrat teorema

- Teorem.

Neka su a, b, c prirodni brojevi. Ako $c \mid a$ ili $c \mid b$, onda $c \mid ab$.

- Obrat.

Neka su a, b, c prirodni brojevi. Ako $c \mid ab$, onda $c \mid a$ ili $c \mid b$.

- obrat nije istinit

- kako to dokazati? protuprimjer!

... ako i samo ako...

Tvrđnja teorema je može biti i ekvivalencija.

- Trokut sa stranicama duljina $a \leq b \leq c$ je pravokutan ako i samo ako je $a^2 + b^2 = c^2$.
- Broj je djeljiv s 3 ako i samo ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3.
 - poopćenje teorema:
 - $3 \rightarrow 9$ (istina)
 - $3 \rightarrow 27$ (nije istina)

Dokaz (tvrđnje $P \Rightarrow Q$)

- direktan dokaz

$$P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_k \Rightarrow Q$$

- indirektan dokaz
- obratom po kontrapoziciji: $\neg Q \Rightarrow \neg P$
- svođenjem na kontradikciju: $P \wedge (\neg Q) \Rightarrow \text{Laž}$
- i drugo...
- npr. metodom matematičke indukcije

Nekoliko dokaza

Teorem.

(direktan dokaz)

Ako je n prirodan broj koji nije djeljiv s 3, onda njegov kvadrat pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1.

Teorem.

(obrat po kontrapoziciji)

Ostatak pri dijeljenju prostog broja s 30 je prost broj ili 1.

Teorem.

(svođenje na kontradikciju)

Ako za međusobno različite pravce u ravnini a , b i c vrijedi $a \parallel b$ i $b \parallel c$, onda je $a \parallel c$.

Teorem. Ako je n prirodan broj koji nije djeljiv s 3, onda njegov kvadrat pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1.

Dokaz. Neka je n prirodan broj koji nije djeljiv s 3.

Tada vrijedi $n = 3k + 1$ ili $n = 3k + 2$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

U prvom slučaju, $n^2 = (3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$.

U drugom slučaju, $n^2 = (3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$.

U oba slučaja, broj n^2 prikazali smo u obliku $3A + 1$ za neki $A \in \mathbb{N}$ što znači da je ostatak pri dijeljenju broja n^2 s 3 jednak 1.

Time je tvrdnja dokazana.

Teorem.

Ostatak pri dijeljenju prostog broja s 30 je prost broj ili 1.

Neka je n prirodan broj i r ostatak pri dijeljenju broja n s 30. Umjesto tvrdnje: Ako je n prost broj, onda je r prost broj ili 1, dokazat ćemo tvrdnju: Ako r nije prost broj niti 1, onda n nije prost broj.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno (od tvrdnje teorema), tj. da je ostatak pri dijeljenju broja n s 30 jedan od brojeva:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27 ili 28.

Ako je ostatak paran broj, i broj n je paran (a nije 2), stoga n nije prost. Ako je ostatak djeljiv s 3 (ili 5), i broj n je djeljiv s 3 (odnosno 5), stoga ni u tim slučajevima n nije prost broj.

Kako je svaki od navedenih ostataka ili paran ili djeljiv s 3 ili djeljiv s 5, pokazali smo da je u svim slučajevima broj n složen broj. Time je dokaz dovršen.

Teorem. Ako za međusobno različite pravce u ravnini a , b i c vrijedi $a \parallel b$ i $b \parallel c$, onda je $a \parallel c$.

Dokaz. Neka su a , b i c međusobno različiti pravci. Uočimo da se dva različita pravca mogu sjeći u jednoj točki ili biti paralelni (nema treće mogućnosti).

Pretpostavimo da je $a \parallel b$ i $b \parallel c$, ali $a \nparallel c$.

Kako a i c nisu paralelni, oni se sijeku u nekoj točki T .

Promotrimo odnos točke T i pravca b . Ako bi točka T pripadala pravcu b , onda bi se pravci a i b sjekli u T , što je nemoguće jer je $a \parallel b$.

Dakle, točka T nije na pravcu b , pa prema aksiomu o paralelama postoji jedinstveni pravac kroz točku T koji je paralelan s pravcem b .

Međutim, znamo da to vrijedi za pravce a i c , pa bi slijedilo $a = c$.

No, to je u suprotnosti s uvjetom da su ti pravci međusobno različiti.

Kontradikcija. QED

Hipoteza

= matematička tvrdnja za koju nismo sigurni je li istinita ili nije

- Za prirodni broj $n \geq 3$ ne postoje prirodni brojevi a, b, c takvi da vrijedi $a^n + b^n = c^n$. (dokazano, Veliki Fermatov teorem)
- Svaki broj oblika $2^{2^n} + 1$ je prost. (opovrgnuto)
- Svaki paran broj je zbroj dva prosta broja. (Goldbachova slutnja)
- Postoji beskonačno mnogo parova brojeva blizanaca.
(brojevi blizanci su dva prosta broja čija je razlika 2)

